Introduzione alla meccanica quantistica, l2

Fulvio Ciriaco

6 aprile 2026

La scelta è nostra

Gli stati quantistici costituiscono uno spazio lineare, dati gli stati ψ_i del sistema ogni loro combinazione lineare $\sum c_i \psi_i$ è pure uno stato possibile. Per fortuna è molto facile trovare o creare spazi lineari in matematica.

La scelta è nostra, ma tutto è più facile se disponiamo di un prodotto scalare.

Lo spazio dei vettori C^N

Gli spazi R^N e C^N sono spazi lineari con le consuete operazioni di combinazione lineare e prodotto scalare.
Perchè la meccanica quantistica è contagiata dai numeri complessi?

$$m\ddot{x} = -kx$$

$$(v \cdot u) = \sum_i v_i^* u_i = (u \cdot v)^*$$

$$[a_1, a_2] \cdot [b_1, b_2] = a_1^* b_1 + a_2^* b_2$$

Lo spazio delle funzioni L2

Le funzioni continue $f(x)$ costituiscono uno spazio lineare. Una funzione appartiene allo spazio L2 se è possibile calcolare

$$\int_{?} f^*(x) f(x) dx;$$

perchè ho messo un ? al posto degli estremi di integrazione? Qualunque cosa sia x, il significato comune di queste funzioni d'onda passa attraverso

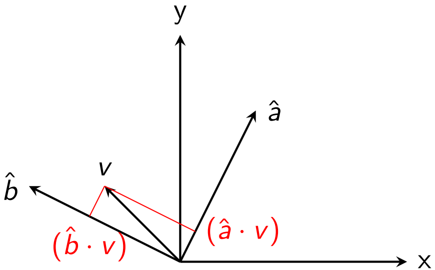
$$\frac{|f(x)|^2}{\int f^*(x) f(x) dx} = P(x)$$

Purtroppo dobbiamo anche lavorare con funzioni che non sono L2

$$\psi(x) = e^{ikx}$$

prodotto scalare

$$(f \cdot g) = \int f^*(x) g(x) dx = (g \cdot f)^*$$



ma è davvero utile?

base

Una base è un insieme di elementi di uno spazio lineare che può generare tutto lo spazio per combinazione lineare.

$$
\begin{aligned}
[a, b] &= a[1, 0] + b[0, 1] \\
[a, b] &= \frac{a+b}{2}[1, 1] + \frac{a-b}{2}[1, -1]
\end{aligned}
$$

Una base si dice ortonormale se tutti i suoi elementi e sono fra loro ortogonali e di lunghezza unitaria.

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$$

$$f(x, y, z) = e^{-|r|} * P(x, y, z)$$

se la base è ortonormale, il prodotto scalare è più utile

$$(e_i, e_j) = \qquad \delta_{ij} \implies v = \sum_i a_i e_i = \sum_i (e_i, v) e_i$$

$$|v\rangle = \sum |e_i\rangle\langle e_i|v\rangle$$

$$I = \sum_i |e_i\rangle\langle e_i|$$

altri operatori per favore

Un operatore è una funzione che ha come dominio e codominio lo stesso spazio.

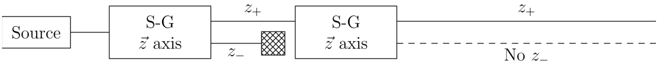
$$
\begin{aligned}
Of(x) &= g(x) \\
O|\alpha\rangle &= |\beta\rangle \\
O[a, b] &= [c, d]
\end{aligned}
$$

Ci interessano solo operatori lineari:

$$
\begin{aligned}
O(a|\alpha\rangle + b|\beta\rangle) &= aO|\alpha\rangle + bO|\beta\rangle \\
O\sum_i a_i|\psi_i\rangle &= \sum_i a_i O|\psi_i\rangle
\end{aligned}
$$

autovalori, autovettori, autostati

$$O|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$$



$$OO|\psi\rangle = O\lambda|\psi\rangle = \lambda^2|\psi\rangle$$

rappresentazione diagonale

Alcuni operatori hanno una base completa di autovettori:

$$O|\psi_i\rangle = \lambda_i|\psi_i\rangle$$

In tal caso:

$$\begin{aligned}
|\phi\rangle &= \sum_i a_i|\psi_i\rangle = \sum |\psi_i\rangle\langle\psi_i|\phi\rangle \\
O|\phi\rangle &= \sum_i a_i O|\psi_i\rangle = \sum_i a_i\lambda_i|\psi_i\rangle
\end{aligned}$$