

Introduzione alla meccanica quantistica, I3

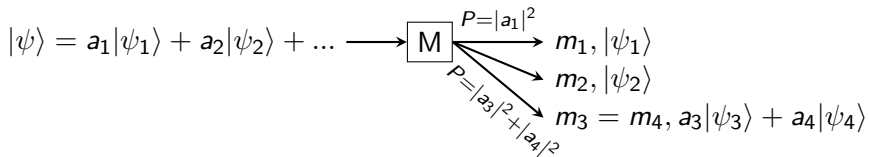
Fulvio Ciriaco

6 aprile 2026



matematica e fisica quantistica, secondo la scuola di Copenhagen

$$M|\psi_i\rangle = m_i|\psi_i\rangle$$



$$O|\psi_i\rangle = o_i|\psi_i\rangle$$

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i|\psi_i\rangle$$

$$\langle O \rangle = \langle \psi | O | \psi \rangle = \sum_i |a_i|^2 o_i = \sum_i P_i o_i$$

$$\langle x \rangle = \langle \psi | x | \psi \rangle = \int |\psi(x)|^2 x dx$$



lo voglio hermitiano

se O è hermitiano: $\langle \phi | O \psi \rangle = \langle \psi | O \phi \rangle^* = \langle \phi | O | \psi \rangle$

$$O|\psi_i\rangle = o_i|\psi_i\rangle$$

$$o_i \in \mathbb{R}$$

$$i \neq j \implies \langle \psi_i | \psi_j \rangle = 0$$

\implies gli autovettori di O costituiscono una valida base ortogonale, o ortonormale.

$$|\psi\rangle = \sum_i a_i |\psi_i\rangle$$

$$\langle \psi | O \psi \rangle = \sum_i \sum_j a_i^* a_j \langle \psi_i | O \psi_j \rangle = \sum_i |a_i|^2 o_i$$



operatori hermitiani e non: esempi

$$\hat{x} = x \cdot$$

$$\int f^*(x) x g(x) dx = \left[\int g^*(x) x f(x) dx \right]^*$$

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$\int f^*(x) \hat{p} g(x) dx = \left[\int g^*(x) \hat{p} f(x) dx \right]^*$$

dimostrare, integrando per parti



operatori hermitiani e non: esempi

$\begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{bmatrix}$ è una matrice hermitiana, i suoi autovalori sono $1/2$ e $-1/2$. I suoi autovettori sono $[1, 0]$ e $[0, 1]$.

$$s_z \alpha = \frac{\hbar}{2} \alpha \qquad \left| \frac{1}{2} \right\rangle \equiv \alpha$$
$$s_z \beta = -\frac{\hbar}{2} \beta \qquad \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \equiv \beta$$



operatori hermitiani e non: esempi

anche $\begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix}$ è una matrice hermitiana, i suoi autovalori sono $1/2$ e $-1/2$. I suoi autovettori sono $\frac{\sqrt{2}}{2}[1, 1]$ e $\frac{\sqrt{2}}{2}[1, -1]$. Verificare.

$$s_x \alpha = \frac{\hbar}{2} \beta$$

$$s_x \beta = \frac{\hbar}{2} \alpha$$

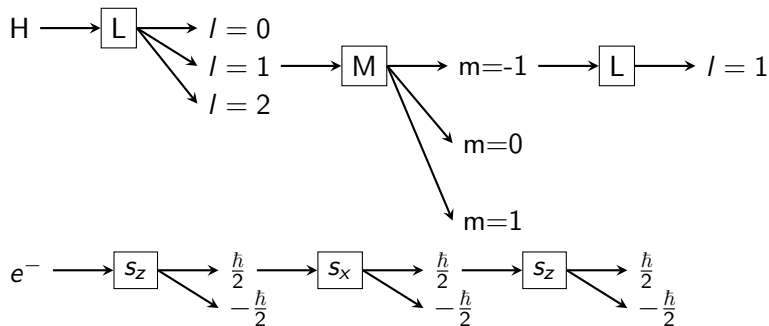


$$s_y \alpha = i \frac{\hbar}{2} \beta$$
$$s_y \beta = -i \frac{\hbar}{2} \alpha$$

scrivete una rappresentazione matriciale e calcolate gli autovalori ed autovettori.



matematica e fisica quantistica, ancora



$$\hat{L}\hat{M} = \hat{M}\hat{L}$$
$$\hat{S}_z\hat{S}_x \neq \hat{S}_x\hat{S}_z$$



Commutatore:

$$[A, B] = AB - BA$$

Quando il commutatore è una costante chiamiamo gli operatori coniugati.

$$x = x \cdot$$

$$p = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$(xp - px)f(x) = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} x \right) f(x)$$

$$= -i\hbar (x\dot{f}(x) - f(x) - x\dot{f}(x)) = i\hbar f(x)$$

$$[x, p] = xp - px = i\hbar$$



calcolare il commutatore fra $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

calcolare il commutatore fra s_z e s_x

calcolare il commutatore $[x, p^2]$



dispersione statistica, davvero non possiamo sapere tutto

il valore di aspettazione e la dispersione:

$$\langle A \rangle = \sum_i A_i p_i \qquad \langle A \rangle = \int A(x) \rho(x) dx$$

$$\sigma_A^2 = \langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle \qquad \sigma_A^2 = \int (A(x) - \langle A \rangle)^2 \rho(x) dx$$

principio di indeterminazione: se A e B sono due variabili coniugate:

$$\sigma_A \sigma_B \geq \frac{\hbar}{2}$$



l'esempio più famoso: x, p

La minima indeterminazione si raggiunge per una funzione d'onda gaussiana:

$$\psi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\left(\frac{x-\mu}{2\sigma}\right)^2}$$

esercizio: calcolare $\sigma_x\sigma_p$ per la funzione d'onda gaussiana, sopra introdotta. saranno utili le seguenti osservazioni:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{-\alpha x^2} = - \frac{\partial}{\partial \alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

