Introduzione alla meccanica quantistica, l4

Fulvio Ciriaco

6 aprile 2026

dinamica temporale

$$-i\hbar\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = H\psi(x,t)$$

$$H\phi_n(x) = \epsilon_n\phi_n(x)$$

$$\psi(x,t) = \sum_n a_n(t)\phi_n(x)$$

$$-i\hbar\sum_n \frac{\partial a_n(t)\phi_n(x)}{\partial t} = \sum_n H a_n(t)\phi_n(x)$$

soluzione, hamiltoniana indipendente dal tempo

$$-i\hbar \sum_n \frac{\partial a_n(t)\phi_n(x)}{\partial t} = \sum_n H a_n(t)\phi_n(x)$$

$$x = y \iff \forall f : f(x) = f(y)$$

$$\psi = \xi \iff \forall \phi : \langle \phi | \psi \rangle = \langle \phi | \xi \rangle$$

$$-i\hbar \langle \phi_k | \sum_n \frac{\partial a_n(t)\phi_n(x)}{\partial t} \rangle = \langle \phi_k | \sum_n a_n(t)\epsilon_n \phi_n(x) \rangle$$

$$-i\hbar \dot{a}_k = \epsilon_k a_k$$

stato puro $\equiv$ stato stazionario

$$-i\hbar \dot{a}_k = \epsilon_k a_k$$

$$a_k(t) = a_k(t=0)e^{i\frac{\epsilon_k t}{\hbar}}$$

consideriamo uno stato puro:

$$\psi(t=0) = \phi_k \implies \psi(x,t) = \phi_k e^{i\frac{\epsilon_k t}{\hbar}}$$

$$\langle O \rangle = \langle \phi_k e^{i\frac{\epsilon_k t}{\hbar}} | O | \phi_k e^{i\frac{\epsilon_k t}{\hbar}} \rangle = \langle \phi_k | O | \phi_k \rangle$$

vera dinamica

$$\psi(t=0) = a_1\phi_1 + a_2\phi_2 \implies \psi(t) = a_1 e^{i\frac{\epsilon_1 t}{\hbar}}\phi_1 + a_2 e^{i\frac{\epsilon_2 t}{\hbar}}\phi_2$$

$$\begin{aligned}
\langle x\rangle(t) &= \langle\psi(t)|x|\psi(t)\rangle \\
&= \langle a_1 e^{i\frac{\epsilon_1 t}{\hbar}}\phi_1 + a_2 e^{i\frac{\epsilon_2 t}{\hbar}}\phi_2|x|\langle a_1 e^{i\frac{\epsilon_1 t}{\hbar}}\phi_1 + a_2 e^{i\frac{\epsilon_2 t}{\hbar}}\phi_2\rangle \\
&= |a_1|^2\langle\phi_1|x|\phi_1\rangle + |a_2|^2\langle\phi_2|x|\phi_2\rangle \\
&+ \underbrace{a_1^* a_2 e^{i\frac{(\epsilon_2-\epsilon_1)t}{\hbar}}\langle\phi_1|x\phi_2\rangle + cc}_{2|a_1^* a_2\langle\phi_1|x|\phi_2\rangle|cos(\frac{(\epsilon_1-\epsilon_2)t}{\hbar}+\alpha_0)}
\end{aligned}$$

dinamica a due stati

In una miscela di due stati l'attesa di un qualunque osservabile O oscilla con frequenza

$$\omega = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\hbar}$$

la stessa frequenza di un fotone entrante di energia $\epsilon_1 - \epsilon_2$.

vera dinamica

Non possiamo vedere come varia la funzione d'onda.

$$\frac{\partial \langle O \rangle}{\partial t} = \frac{\partial \langle \psi(t) | O | \psi(t) \rangle}{\partial t} = \langle \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} | O | \psi(t) \rangle + \langle \psi(t) | O | \frac{\partial \psi(t)}{\partial t} \rangle$$

$$\frac{\partial \psi(t)}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} H \psi(t) \implies \frac{\partial \langle O \rangle}{\partial t} = \langle \psi(t) | -\frac{i}{\hbar} [O, H] | \psi(t) \rangle$$

$$\frac{\partial O}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar} [O, H]$$

e il principio di corrispondenza?

Consideriamo la funzione d'onda per il moto di una particella: $\psi(x,t)$, come varia il valore atteso della posizione?

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[x, H] = -\frac{i}{2m\hbar}[x, p^2]$$

$$\begin{aligned} [x, p^2] &= xp^2 - p^2 x = xp^2 - pxp + pxp - p^2 x \\ &= (xp - px)p + p(xp - px) = 2i\hbar p \\ \frac{\partial x}{\partial t} &= \frac{p}{m} \end{aligned}$$

$F = ma$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{i}{\hbar}[p, H] = -\frac{i}{\hbar}[p, V(x)]$$

$$[p, V(x)] = pV - Vp$$

$$(pV - Vp)\psi(x) = \psi(x)pV + Vp\psi(x) - Vp\psi(x) = -i\hbar\frac{\partial V}{\partial x}\psi(x)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\nabla V \implies \frac{\partial \langle\psi|p|\psi\rangle}{\partial t} = \langle\psi|\nabla V|\psi\rangle$$

il principio di indeterminazione e la dinamica temporale

Abbiamo visto che negli stati stazionari, il valore di aspettazione degli osservabili non cambia nel tempo. Nella semplice dinamica a due stati, abbiamo visto che la velocità di variazione degli osservabili è proporzionale alla differenza di energia tra i due livelli.

$$\sigma_E \frac{\sigma_O}{\left|\frac{\partial O}{\partial t}\right|} \geq \frac{\hbar}{2}$$

nell'equazione vediamo legati l'indeterminazione sull'energia e il tempo di variazione di un osservabile (tempo di vita).
Questa equazione viene spesso barbaramente riscritta nella forma:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

nella cui forma passa sotto il nome di principio di indeterminazione tra energia e tempo.