

# Introduzione alla meccanica quantistica, I5

*Fulvio Ciriaco*

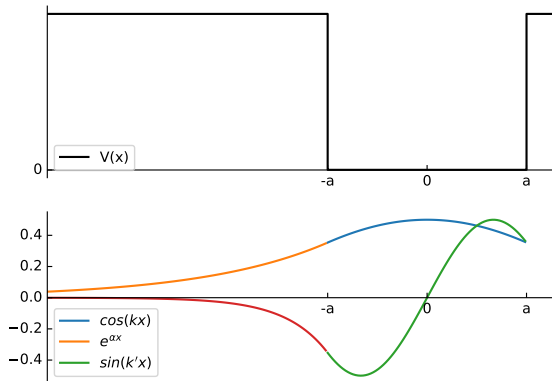
6 aprile 2026



# la particella nella scatola

soluzione del moto unidimensionale in una buca a scalino

$$H\psi_n(x) = \left( \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x) \right) \psi_n(x) = \epsilon_n \psi_n(x)$$



## soluzioni a tratti

in ciascun tratto, possiamo risolvere l'equazione differenziale di Schrödinger:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_n(x) = (V - \epsilon_n) \psi_n(x)$$

due tipi di soluzioni

$$\psi = a_d e^{ikx} + a_s e^{-ikx}$$

$$\hbar k = \sqrt{2m} \sqrt{\epsilon - V}$$

$$\psi = b_d e^{\alpha x} + b_s e^{-\alpha x}$$

$$\hbar \alpha = \sqrt{2m} \sqrt{V - \epsilon}$$



## soluzioni a tratti, raccordo

dobbiamo assicurarci che  $\psi$  soddisfi i necessari requisiti di continuità nei punti di raccordo:

$$\psi_s(-a) = \psi_c(-a)$$

$$\psi'_s(-a) = \psi'_c(-a)$$

$$\psi_c(a) = \psi_d(a)$$

$$\psi'_c(a) = \psi'_d(a)$$

dove

$$\psi_{s[\text{inistra}]} = ae^{\alpha x}$$

$$\psi_{c[\text{entro}]} = b \cos(kx) + c \sin(kx)$$

$$\psi_{d[\text{estra}]} = de^{-\alpha x}$$



## commutazione e simmetria

consideriamo l'operatore  $Rf(x) = f(-x)$ , esso commuta con l'hamiltoniana per un potenziale simmetrico rispetto all'asse  $y$ :

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x), \quad V(x) = V(-x)$$

$$\frac{p^2}{2m} R\psi(x) = c \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(-x) = c(-1)^2 \frac{\partial^2}{\partial (-x)^2} \psi(-x) = R p^2 \psi(x)$$

$$V(x) R\psi(x) = V(x)\psi(-x) = V(-x)\psi(-x) = R V(x)\psi(x)$$

pertanto



## commutazione e simmetria

se  $R$  e  $H$  commutano, allora posso sempre fare in modo che tutti gli autovettori dell'uno siano autovettori anche dell'altro

$$R\psi(x) = \psi(-x) = \lambda\psi(x)$$

$$R^2\psi(x) = R\psi(-x) = \psi(x)$$

o

$$\lambda = 1 \quad \text{simmetriche} \quad \psi_c = b \cos(kx)$$

$$\lambda = -1 \quad \text{antisimmetriche} \quad \psi_c = c \sin(kx)$$



# finalmente la soluzione!

$$\psi_s(-a) = \psi_c(-a)$$

oppure

$$\frac{\psi'_s(-a)}{\psi_s(-a)} = \frac{\psi'_c(-a)}{\psi_c(-a)}$$

$$\psi_c = b \cos(kx) + \cancel{c \sin(kx)}$$

$$\psi_s = ae^{\alpha x}$$

$$\alpha = -k \frac{\sin(-ka)}{\cos(-ka)}$$

$$\psi'_s(-a) = \psi'_c(-a)$$

$$\hbar k = \sqrt{2m\epsilon}$$

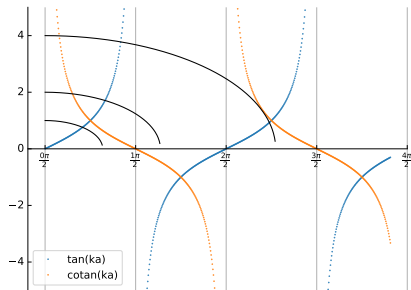
$$\hbar \alpha = \sqrt{2m(V_M - \epsilon)}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2mV_M}{\hbar^2} - k^2}$$

$$\alpha = k \tan(ka)$$



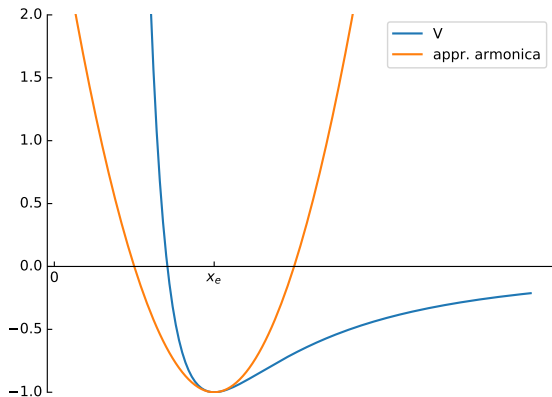
# finalmente la soluzione!



- ▶ trovare le condizioni per la soluzione antisimmetrica  
 $\psi_c = c \sin(kx)$
- ▶ trovare le soluzioni per una particella completamente vincolata nella scatola, cioè  $\psi(a) = \psi(-a) = 0$ .



# L'oscillatore armonico



$$V(x) = V(x = x_e) + \cancel{\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x=x_e}} (x - x_e) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_e} (x - x_e)^2 + \dots$$



# L'equazione di Schrödinger

$$\left( \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2}x^2 \right) \psi_n = \epsilon_n \psi_n$$

proviamo a risolverla algebricamente

$$\eta^+ = ax - ibp$$

$$\eta^- = ax + ibp$$

$$\eta^+ \eta^- = a^2 x^2 + b^2 p^2 - ba\hbar$$

$$\eta^- \eta^+ = a^2 x^2 + b^2 p^2 + ba\hbar$$



$$\eta^+ \eta^- = a^2 x^2 + b^2 p^2 - ba \hbar$$

$$\eta^- \eta^+ = a^2 x^2 + b^2 p^2 + ba \hbar$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{\frac{1}{Km}}$$

$$b = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{Km}$$

$$\eta^- \eta^+ - \eta^+ \eta^- = 2ab \hbar = \hbar$$

$$\frac{\omega}{2} (\eta^- \eta^+ + \eta^+ \eta^-) = H = \frac{\hbar \omega}{2} + \omega \eta^+ \eta^-$$



## il solito esercizio?

valutiamo il commutatore tra  $H$  e  $\eta^\pm$ ,

$$[H, \eta^+] = \omega[\eta^+\eta^-, \eta^+] = \omega(\eta^+\eta^-\eta^+ - \eta^+\eta^+\eta^-) = \hbar\omega\eta^+$$

$$[H, \eta^-] = \omega[\eta^+\eta^-, \eta^-] = \omega(\eta^+\eta^-\eta^- - \eta^-\eta^+\eta^-) = -\hbar\omega\eta^-$$

sia  $H\psi_n = \epsilon_n\psi_n$ , allora

$$H\eta^+ = \eta^+H + \hbar\omega\eta^+$$

$$H\eta^+\psi_n = \eta^+H\psi_n + \hbar\omega\eta^+\psi_n = (\epsilon_n + \hbar\omega)\eta^+\psi_n$$

$$H\eta^- = \eta^-H - \hbar\omega\eta^-$$

$$H\eta^-\psi_n = \eta^-H\psi_n - \hbar\omega\eta^-\psi_n = (\epsilon_n - \hbar\omega)\eta^-\psi_n$$



## una scala, infinita?

se  $\epsilon_n, \psi_n$  è una soluzione dell'equazione di Schrödinger, allora anche  $\epsilon_n + \hbar, \eta^+ \psi_n \equiv \epsilon_{n+1}, \psi_{n+1}$  è una soluzione. Ma vale lo stesso anche per  $\eta^-$ ? La forma dell'hamiltoniana richiede che  $\epsilon_n > 0$ , deve perciò essere  $\eta^- \psi_0 = 0$ . Calcoliamo il valore di aspettazione dell'energia per  $\psi_0$

$$\epsilon_0 = \frac{\langle \psi_0 | H | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} = \frac{\langle \psi_0 | \frac{\hbar\omega}{2} + \eta^+ \eta^- | \psi_0 \rangle}{\langle \psi_0 | \psi_0 \rangle} = \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\epsilon_n = \hbar\omega \left( \frac{1}{2} + n \right)$$



## regole di selezione

possiamo calcolare anche il valore di aspettazione del momento di dipolo

$$\eta^+ = ax - ibp$$

$$\eta^- = ax + ibp$$

$$x = \frac{(\eta^+ + \eta^-)}{2a}$$

$$\langle \psi_i | x | \psi_j \rangle = \frac{\langle \psi_i | \eta^+ | \psi_j \rangle + \langle \psi_i | \eta^- | \psi_j \rangle}{2a} = \frac{\sqrt{i} \delta_{i,j+1} + \sqrt{i+1} \delta_{i,j-1}}{2a}$$

$$a = \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{\frac{1}{Km}}$$



## ma io pensavo di visualizzare le soluzioni

E' possibile risolvere l'equazione differenziale di Schrödinger, ma ormai ne sappiamo di più.

$$\eta^- \psi_0 = 0 \implies \left( \frac{\partial}{\partial x} + \sqrt{Kmx} \right) \psi_0(x) = 0$$

è un'equazione differenziale del primo ordine:

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\alpha x^2} \quad \alpha = \frac{\sqrt{Km}}{2}$$

possiamo poi applicare ripetutamente  $\eta^+$  per ottenere qualsiasi  $\psi_n$  ma possiamo dalla forma di  $\eta^+$  già notare che  $\psi_n = e^{-\alpha x^2} H^n(x)$  dove  $H^n$  è un polinomio di grado  $n$ , polinomio di Hermite.



# Il momento angolare

$$L = r \times p$$

$$L_z = r_x p_y - r_y p_x$$

$$L_y = r_z p_x - r_x p_z$$

$$L_x = r_y p_z - r_z p_y$$

vale la legge di commutazione

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$$

Es. dimostrare la legge di commutazione e le altre due ottenute permutando gli indici



## questione di convenzioni

Viene definito anche l'operatore scalare  $L^2$ :

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$
$$[L^2, L_x] = [L^2, L_y] = [L^2, L_z] = 0$$

Scegliamo di classificare gli autostati del momento angolare rispetto a  $L^2$  e  $L_z$ . In coordinate polari

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi}$$
$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \phi} \psi_m(\phi) = \epsilon_m \psi_m(\phi)$$
$$\psi_m = e^{im\phi}$$

per il moto orbitale solo valori interi di  $m$  hanno senso, ma lo spin intrinseco ammette anche valori semiinteri.



## struttura delle soluzioni

Come per l'oscillatore armonico possiamo risolvere il problema algebricamente tramite due operatori

$$L^+ = L_x + iL_y$$

$$L^- = L_x - iL_y$$

$$[L_z, L^\pm] = \pm \hbar L^\pm$$

quindi  $L_z$  ha autovalori che differiscono di  $\hbar$ , comunque, noto  $L^2$  tali valori sono limitati in alto e in basso dalla relazione

$$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 \implies L^2 \geq L_z^2$$



# struttura delle soluzioni

infine arriviamo ad una caratterizzazione delle autofunzioni di  $L^2$  e  $L_z$  tramite due numeri quantici  $m$  e  $l$  interi o semiinteri, da cui la notazione  $|l, m\rangle$ , con le relazioni

$$L_z |l, m\rangle = m\hbar |l, m\rangle$$

$$L^2 |l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1) |l, m\rangle$$

$$|m| \leq l$$



con una figura, rubata

