calcolare il commutatore tra s_z e s_x

Ci sono diversi modi, tra cui passare attraverso la rappresentazione matriciale. Qui vediamo come risolvere il problema a partire dagli autostati di s_z e delle relazioni che abbiamo già stabilito:

$$s_z \alpha = \frac{\hbar}{2}\alpha$$
$$s_z \beta = -\frac{\hbar}{2}\beta$$
$$s_x \alpha = \frac{\hbar}{2}\beta$$
$$s_x \beta = \frac{\hbar}{2}\alpha$$

In meccanica quantistica si usano spesso le unità atomiche, in cui scalando le unità si possono elidere (uguagliare a 1) $\hbar$, la carica dell'elettrone, la massa dell'elettrone, e l'hartree, una unità energetica pari a 2 volte l'energia dell'atomo di idrogeno.

Vogliamo calcolare $[s_z, s_x]$:

$$s_z s_x \alpha = s_z \frac{\hbar}{2}\beta = -\frac{\hbar^2}{4}\beta \qquad s_x s_z \alpha = s_x \frac{\hbar}{2}\alpha = \frac{\hbar^2}{4}\beta$$

$$[s_z, s_x]\alpha = -\frac{\hbar^2}{2}\beta$$

$$s_z s_x \beta = s_z \frac{\hbar}{2}\alpha = \frac{\hbar^2}{4}\alpha \qquad s_x s_z \beta = -s_x \frac{\hbar}{2}\beta = -\frac{\hbar^2}{4}\alpha$$

$$[s_z, s_x]\beta = \frac{\hbar^2}{2}\alpha$$

confrontandole con le relazioni:

$$s_y \alpha = i\frac{\hbar}{2}\beta$$

$$s_y \beta = -i\frac{\hbar}{2}\alpha$$

possiamo notare che

$$[s_z, s_x] = i\hbar s_y$$

ovviamente allo stesso modo valgono le relazioni che si ottengono permutando ciclicamente gli assi x, y, z e che potete ottenere allo stesso modo:

$$
\begin{aligned}
[s_z, s_x] &= i\hbar s_y \\
[s_x, s_y] &= i\hbar s_z \\
[s_y, s_z] &= i\hbar s_x
\end{aligned}
$$