



F.Mavelli

Laboratorio di Chimica Fisica

Teoria degli Errori Introduzione

Università degli Studi di Bari
Dipartimento di Chimica

Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Definizione

Un'operazione di misura consiste nel:

assegnare un valore numerico per rappresentare una proprietà

Un'operazione di misura non è un processo arbitrario. La misura deve essere riproducibile.

Lo sperimentatore deve seguire un protocollo di regole ben definito.

Una misura è influenzata dalle condizioni ambientali in cui è effettuata.

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica



Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Misura

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica



Campione

Procedura per la misura
della grandezza in esame

misura della grandezza x

Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Scopo di una Misura

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica



Un'operazione di misura può avere finalità diverse.

- Determinazioni di costanti fisiche fondamentali.
- Caratterizzazione proprietà di materiali o sistemi fisici.
- Monitoraggio e controllo di sistemi dinamici.



Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Metodi di Misura

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica



Si distinguono tre diversi metodi di misura:

Metodo Diretto: consiste nel confronto diretto della grandezza da misurare con un campione assunto come unitario.

Metodo Indiretto: consiste nella determinazione del valore di una grandezza attraverso la misura di altre grandezze legate alla prima da una relazione matematica.

Metodo Strumentale: consiste nella determinazione del valore di una grandezza attraverso l'uso di uno strumento opportunamente tarato.

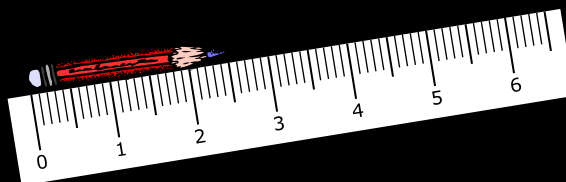
Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Metodo Diretto

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica



Consiste nel confrontare direttamente la grandezza fisica in esame con quella assunta come unitaria, *il campione*, o una copia di esso.



6

Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Metodo Diretto

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica

Questo metodo viene usato quasi esclusivamente per la misura di grandezze fondamentali o per la costruzione di copie dei campioni ed ha un interesse principalmente storico.

LITRO CAMPIONE

cilindro in ottone di capacità di un litro, chiuso superiormente da un disco di vetro opaco di diametro un pò maggiore di quello del contenitore.



METRO CAMPIONE



7

Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Metodo Indiretto

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica

Consiste nella determinazione del valore di una grandezza fisica attraverso la misura del valore di altre grandezze legate alla prima da una relazione analitica.

Esempio:

La velocità media di un corpo può essere determinata attraverso una misura dello spazio percorso (s) e del tempo necessario a percorrerlo (t)

$$\bar{v} = \frac{s}{t}$$



8



Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Esempio

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica



Il Problema di Raffaella

Raffaella ha una pignatta piena di fagioli e vuole determinarne il numero.



- Metodo Diretto:
li conta uno per uno.



- Metodo Indiretto:
 - > determina il peso complessivo dei fagioli (M) e della pignatta (P),
 - > determina il peso di un fagiolo (m),
 - > ricava il numero (n) dei fagioli dividendo il peso totale per il peso specifico.

$$n = \frac{M - P}{m}$$



9

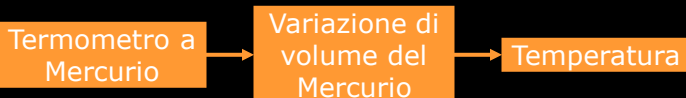
Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Metodo Strumentale

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica

Consiste nella determinazione del valore di una grandezza mediante l'uso di una opportuna strumentazione.

Uno strumento spesso determina il valore della grandezza in esame mediante misure della variazione di una qualche proprietà ad essa correlata:



Alcuni strumenti per poter essere utilizzati devono essere tarati o dal costruttore o dallo sperimentatore.





Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Metodo Strumentale

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica

La taratura dello strumento consiste nella misura di campioni con valori della grandezza in esame noti (*standard*) per valutare la risposta dello strumento

Taratura Termometro a Mercurio nell'intervallo 0-100 °C

1. Immergere il termometro in una soluzione di acqua e ghiaccio (0 °C) e segnare la posizione del mercurio,
2. quindi in acqua in ebollizione (100 °C), segnare la posizione del mercurio,
3. dividere in 100 unità la distanza fra le due tacche

la taratura così descritta implica che sia valida una relazione lineare fra variazione del volume del mercurio e temperatura



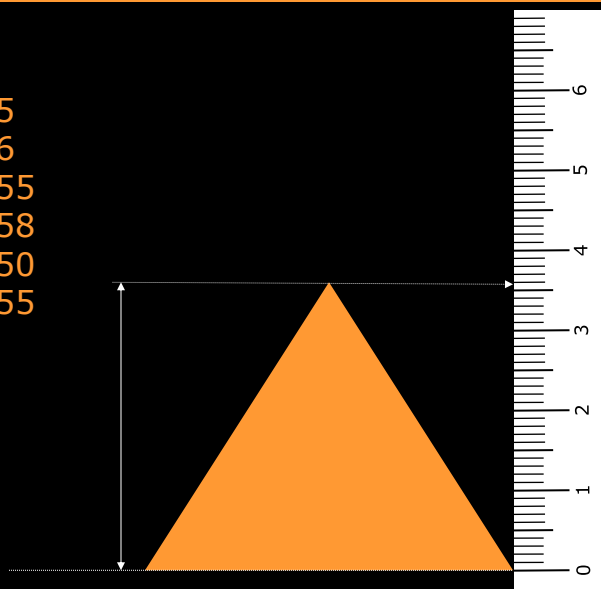
11

Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Incertezza di misura

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica

3.5
3.6
3.55
3.58
3.50
3.55



Analisi degli Errori

L'analisi degli errori rappresenta lo studio ed il calcolo dell'incertezza di una misura.

Nessuna misura, per quanto scrupolosamente eseguita, può essere considerata esente da errori.



Scopo dell'analisi degli errori è:

- rendere la misura più affidabile possibile e quindi gli errori più piccoli possibili,
- stimare il valore massimo che gli errori possono assumere.



Definizione di Errore

L'errore di una misura δx può essere definito come il valore assoluto della differenza fra il valore reale x_r ed il valore misurato x_m :

$$\delta x = |x_r - x_m|$$

ossia lo scostamento fra la misura ed il valore reale.



Ovviamente questa è solo una definizione, infatti se conoscessimo il valore reale della grandezza x non avremmo bisogno di effettuare la misura.





Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Stima Errore

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica

E' di importanza fondamentale riuscire a stimare correttamente l'errore che si commette quando si determina il valore di una grandezza con una data procedura di misura.

E' anche importante scrivere il valore ottenuto con il giusto numero di cifre, ossia determinare l'ultima cifra significativa.

3.5 3.52 3.520 3.5200



15

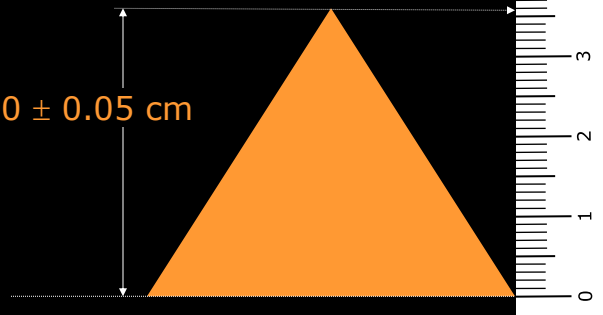
Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Scala Graduata

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica

Se il risultato della misura si ottiene tramite una lettura su di una scala graduata, l'errore che si commette può essere stimato facilmente come la semi-differenza fra due tacche successive, ossia come la più piccola quantità misurabile diviso due.

3.60 ± 0.05 cm



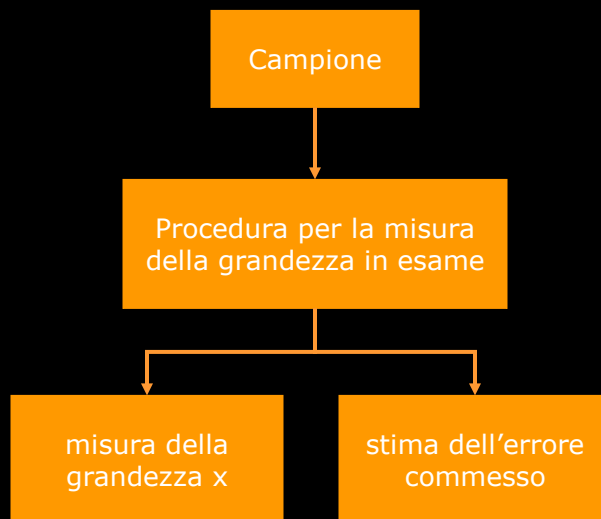
16



Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Misura

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica



Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Cifre significative

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica

Il numero di cifre significative è il numero di cifre con cui è espresso un valore scritto in formato esponenziale:

0.0345	=	0.345e-3	3
0.03450	=	0.3450e-3	4
345	=	0.345e+3	3

l'ultima cifra significativa espressa indica qual è l'incertezza sul dato riportato in assenza di un valore di errore esplicito:

.345e-3	±	0.0005e-3	→	$\left. \begin{array}{l} 0.3455e-3 \\ 0.3445e-3 \end{array} \right\}$
.3450e-3	±	0.00005e-3	→	$\left. \begin{array}{l} 0.34505e-3 \\ 0.34495e-3 \end{array} \right\}$



Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Cifre significative

Il numero di cifre significative va quindi determinato, per il risultato di una misura, in base alla stima dell'errore.

Regola 1

l'errore va riportato al massimo con 2 cifre significative

Regola 2

l'ultima cifra significativa in qualunque risultato deve essere dello stesso ordine di grandezza (nella stessa posizione decimale) dell'errore



Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Cifre significative

$$92.81 \pm 0.3 \longrightarrow 92.8 \pm 0.3$$

$$92.81 \pm 0.3 \longrightarrow 9.28e+1 \pm 0.03e+1$$

$$92.81 \pm 3 \longrightarrow 93 \pm 3$$

$$92.81 \pm 3 \longrightarrow 9.3e+1 \pm 0.3e+1$$

$$92.81 \pm 30 \longrightarrow 90 \pm 30$$

$$92.81 \pm 30 \longrightarrow 0.9e+3 \pm 0.3e+3$$





Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Tipi di Errori

Si distinguono tre tipi di errori possibili:

Illegittimi	non vanno commessi
Sistematici	vanno eliminati
Casuali	vanno stimati e ridotti

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica



21

Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Errori Illegittimi

Sono dovuti ad una cattiva esecuzione della procedura di misura (inesperienza dello sperimentatore) o a banale errore di calcolo (nelle misure indirette).

3.21 3.39 3.18 3.35 ~~5.08~~ 3.34

Le misure affette da errori illegittimi scartano molto rispetto al valore vero (*outlier*) e vanno quindi eliminate e, nel caso, la misura va ripetuta.

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica



22

Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

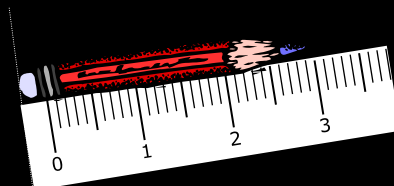
Errori Sistematici

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica



23

Sono errori sistematicamente riproducibili, ossia che determinano sempre lo stesso scostamento fra il valore vero e la misura.



Sono dovuti ad errori nella procedura di misura o alle condizioni in cui essa è effettuata, o ad una cattiva taratura dello strumento.

Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

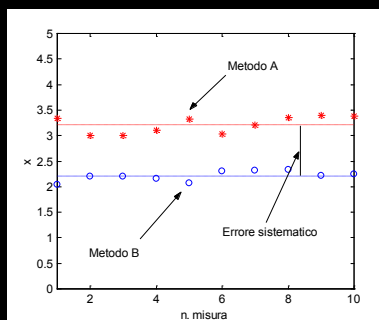
Errori Sistematici

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica



24

Vengono evidenziati misurando grandezze il cui valore è noto o attraverso altre procedure di misura.



Una volta scoperti devono essere eliminati riconsiderando attentamente tutta la metodica di misura.



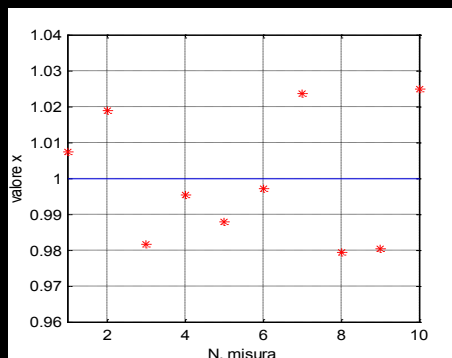
Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Errori Casuali o Random

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica

Sono errori dovuti a fluttuazioni delle condizioni operative (temperatura, pressione, ecc.) o a parametri non controllati. Variano casualmente da misura a misura e non possono essere individuati ed eliminati.

1. 1.0074
2. 1.0189
3. 0.9816
4. 0.9955
5. 0.9880
6. 0.9973
7. 1.0239
8. 0.9795
9. 0.9804
10. 1.0249



25

Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Valor Medio

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica

Data una serie di misure effettuate su uno stesso sistema in tempi differenti o su sistemi analoghi, ossia preparati con le stesse modalità, si calcola il valor medio come la sommatoria di tutti le misure x_i ottenute, diviso per il numero di misure N .

1. 1.0074
2. 1.0189
3. 0.9816
4. 0.9955
5. 0.9880
6. 0.9973
7. 1.0239
8. 0.9795
9. 0.9804
10. 1.0249

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^N x_i}{N} = \frac{1.0074 + 1.0189 + \dots + 1.0249}{10} = 0.9997$$



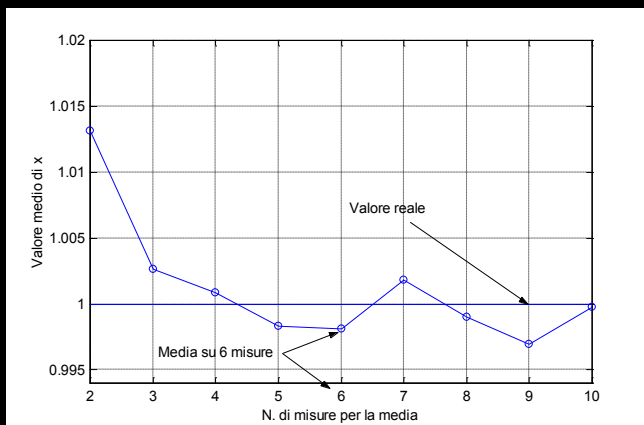
26

Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Errori Casuali o Random

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica

Sono quelli di cui si occupa l'analisi degli errori e possono essere ridotti effettuando un gran numero di misure e facendo la media dei valori ottenuti.



27

Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Esempio



Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica



Il Problema di Raffaella

Raffaella ha una pignatta piena di fagioli e vuole determinarne il numero con il metodo indiretto.



- che errore commette se pesa i fagioli con tutta la pentola ?
- se trascura che insieme ai fagioli possono esserci delle lenticchie ?
- se trascura che i fagioli non hanno tutti lo stesso peso?



28



Precisione

E' definita come il reciproco del massimo scarto ottenuto in una serie di misure di una grandezza

$$p = \frac{1}{x_{\max} - x_{\min}}$$

1. 1.0074
2. 1.0189
3. 0.9816
4. 0.9955
5. 0.9880
6. 0.9973
7. 1.0239
8. 0.9795
9. 0.9804
10. 1.0249

La precisione di un metodo di misura da informazioni sulla riproducibilità della misura stessa, ossia su quanto siano fra loro vicini i valori di misure differenti eseguite sullo stesso campione.

$$p = \frac{1}{1.0249 - 0.9795} = \frac{1}{0.0454} = 22.0264$$



Accuratezza

E' definita come il reciproco del valore assoluto della differenza fra il valore reale x_r ed il valore misurato x_m :

$$a = \frac{1}{|x_m - x_r|}$$

1. 1.0074
2. 1.0189
3. 0.9816
4. 0.9955
5. 0.9880
6. 0.9997
7. 1.0239
8. 0.9795
9. 0.9804
10. 1.0249

L'accuratezza di un metodo di misura da informazioni sull'affidabilità del metodo ossia su quanto la misura ottenuta sia prossima al valore reale:

$$a = \frac{1}{|0.9997 - 1.0000|} = \frac{1}{0.0003} = 3.9410 \cdot 10^3$$





Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Precisione e Accuratezza

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica

Maggiori sono gli errori sistematici minore è l'accuratezza di una misura



Maggiori sono gli errori casuali minore è la precisione di una misura



31

Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Esattezza

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica

Nel caso di un metodo di misura che restituisce il valore della grandezza misurata come il valor medio di una serie di misure successive si definisce l'esattezza

E' definita come il reciproco del valore assoluto della differenza fra il valore reale ed il valore medio:

$$e = \frac{1}{|x_m - x_r|}$$

1. 1.0074
2. 1.0189
3. 0.9816
4. 0.9955
5. 0.9880
6. 0.9973
7. 1.0239
8. 0.9795
9. 0.9804
10. 1.0249





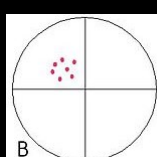
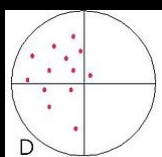
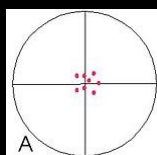
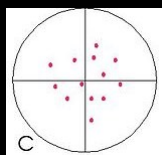
Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Precisione e Esattezza

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica

Il centro del bersaglio rappresenta il valore vero, mentre i punti rossi sono valori di misure ripetute

Esattezza



Metodo A
Accurato
 esatto e preciso

Metodo B
 bassa esattezza
 Alta precisione

Metodo C
 Alta esattezza
 Bassa precisione

Metodo D
 Bassa esattezza
 bassa precisione

Precisione



Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Errore relativo

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica

Se il risultato di un operazione di misura risulta essere:

$$x_m \pm \delta x$$

ove x_m è il valore misurato δx è l'errore commesso, allora viene definito *errore relativo*:

Errore relativo

$$\varepsilon_{rel} = \frac{\delta x}{|x_m|}$$

il rapporto fra l'errore ed il valore assoluto della misura.





Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Errore relativo

L'errore relativo è una grandezza adimensionale che ci permette di capire la bontà della nostra misura:

Misura x_m	Errore assoluto δx	Errore relativo ϵ_{rel}
5 cm	1 cm	0.2
5 m	1 cm	0.002
5 Km	1 cm	0.000002

bontà misura
↓

Commettere un errore assoluto di 1 cm su di una misura di 5 cm o 5 m o 5 Km significa avere una procedura di misura via via migliore, come mostrato dall'errore relativo via via più piccolo.

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica



Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Errore relativo percentuale

L'errore assoluto è solitamente di uno due ordini di grandezza inferiore al valore della misura.



Spesso l'errore relativo ($\sim 10^{-2}$) viene moltiplicato per 100 ed espresso come errore percentuale

Errore relativo percentuale:

$$\epsilon_{\%} = \frac{\delta x}{|x_m|} \cdot 100$$

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica





Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Errore relativo percentuale

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica

Errore
Relativo
Percentuale



Numero
Cifre
Sigifcative

L'errore relativo percentuale è strettamente legato al numero di cifre significative.

Si considerino ad esempio i due numeri:

$$5.1e+2 = 510$$

$$5.1e-1 = 0.51$$

entrambi espressi con due cifre significative che avranno un incertezza sulla terza cifra

$$510 \pm 5$$

$$0.51 \pm 0.005$$



Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Errore relativo percentuale

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica

Perciò avranno entrambi un errore percentuale del 1%:

$$\varepsilon_{\%} = \frac{5}{510} \cdot 100 = \frac{0.005}{0.51} \cdot 100 = 1\%$$

Saremmo così portati a concludere che un errore dell'1% corrisponde a 2 cifre significative. In realtà, se consideriamo i due valori limite con 2 cifre significative:

$$99 \pm 0.5$$

$$\varepsilon_{\%} = 0.5\%$$

$$10 \pm 0.5$$

$$\varepsilon_{\%} = 5\%$$





Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Errore relativo percentuale

Troviamo che un errore percentuale compreso fra lo 0.5% ed il 5% implica una misura con 2 sole cifre significative.

Cifre significative	Errore percentuale	
	1	5%-50%
2	0.5%-5%	~ 1%
3	0.05%-0.5%	~ 0.1%

Ragionando in maniera del tutto analoga possiamo ottenere la tabella di corrispondenza fra errore percentuale e numero di cifre significative.

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica



Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Esempio

La misura della lunghezza l risulta essere:

$$l_m = 50 \pm 1 \text{ cm}$$

Errore relativo

$$\epsilon_{rel} = \frac{\delta l}{|l_m|} = \frac{1}{50} = 0.02$$

Errore relativo percentuale:

$$\epsilon_{\%} = \frac{\delta l}{|l_m|} \cdot 100 = 2\%$$

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica





Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Incertezza misura

L'incertezza sul risultato di una misura può essere espressa sia in termini di errore assoluto che in termini di errore relativo o percentuale:

Errore assoluto $\rightarrow x_m \pm \delta x$ *

Errore relativo $\rightarrow x_m (1 \pm \epsilon_{rel})$

Errore relativo percentuale: $\rightarrow x_m \pm \epsilon_{\%}$ *

* espressioni più usate



Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Esempio

La misura della lunghezza l vista in precedenza può essere, ad esempio, espressa come:

Errore assoluto $\rightarrow 50 \pm 1$

Errore relativo $\rightarrow 50(1 \pm 0.02)$

Errore relativo percentuale: $\rightarrow 50 \pm 2\%$





Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Dimostriamo: $x_m \pm \delta x = x_m (1 \pm \epsilon_{rel})$

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica

Metto in evidenza x_m

$$x_m \pm \delta x = x_m \left(1 \pm \frac{\delta x}{x_m} \right)$$

$$x_m > 0 \rightarrow |x_m| = x_m$$

$$x_m < 0 \rightarrow |x_m| = -x_m$$

$$x_m \pm \delta x = x_m \left(1 \pm \frac{\delta x}{|x_m|} \right)$$

$$x_m \pm \delta x = x_m \left(1 \mp \frac{\delta x}{|x_m|} \right)$$

$$x_m \pm \delta x = x_m (1 \pm \epsilon_{rel})$$



Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Esercizi

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica

Riscrivere i seguenti valori con l'esatto numero di cifre significative:

$$h = 5.03 \pm 0.04329 \text{ m}$$

$$h = 5.03 \pm 0.04 \text{ m}$$

$$t = 19.5432 \pm 1.04 \text{ sec}$$

$$t = 19.5 \pm 1.0 \text{ sec}$$

$$q = -3.21 \cdot 10^{-19} \pm 2.67 \cdot 10^{-20} \text{ coulombs}$$

$$q = -3.2 \cdot 10^{-19} \pm 0.3 \cdot 10^{-19} \text{ coulombs}$$

$$\lambda = 0.000000563 \pm 0.00000007 \text{ m}$$

$$\lambda = 560 \pm 70 \text{ nm} = (0.56 \pm 0.07) \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$m = 3.267 \cdot 10^3 \pm 42 \text{ g}$$

$$m = 3.27 \pm 0.04 \text{ Kg}$$





Fabio Mavelli - Laboratorio Chimica Fisica - a.a. 2012-2013

Bibliografia

Università degli Studi di Bari - Dipartimento di Chimica



1. Campbell N.R., *Foundation of Science*, Dover, New York, 1957.
2. Mandel J., *The Statistical Analysis of Experimental Data*, Dover, New York, 1964.
3. Bevington P.R., Robinson D.K., *Data Reduction and Error Analysis for the Physical Science*, McGraw-Hill, New York, 1992.
4. Taylor J.R., *Introduzione all'analisi degli Errori*, Zanichelli, Bologna, 1996.